МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ

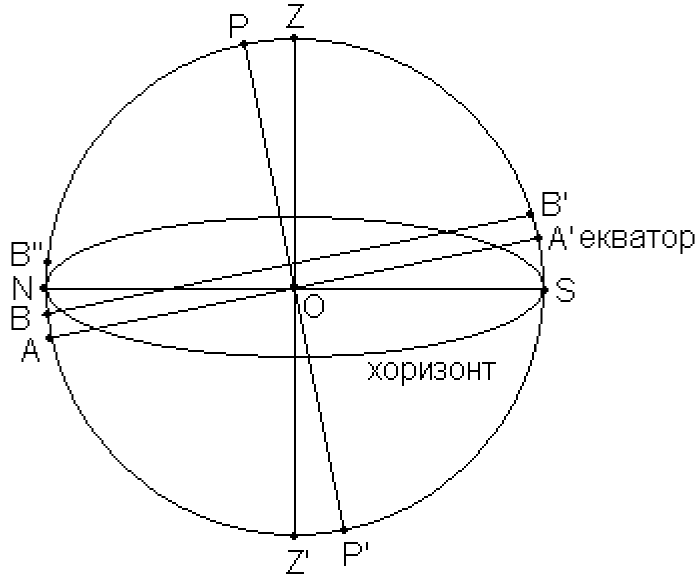
VII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
IV кръг
14 юли 2004 г.

Ученици младша възраст

Задача 1. Самотен мореплавател пътешества из океаните, без да използва средства за радиовръзка и спътниковите системи за определяне на географските координати. Той е взел със себе си само точен часовник, компас, географска карта, ъгломерни инструменти, астрономически алманах и любимия си говорящ папагал. Мореплавателят редовно определя местоположението си и го записва в яхтения дневник. На 13 юни го застига буря и той загубва управлението над яхтата си. Часове по-късно небето се изяснява. Пътешественикът измерва височината над хоризонта на центъра на видимия слънчев диск в горна кулминация. Тя се оказва 46º45′. Той си спомня, че малко преди бурята е наблюдавал Слънцето в долна кулминация и тогава най-долната точка от видимия слънчев диск се е допирала до хоризонта.

- Намерете приблизително географската ширина на мореплавателя след бурята.
- Променило ли се е съществено положението на яхтата по географска ширина след бурята, в сравнение с това преди бурята?
- Опишете теоретичен начин, по който мореплавателят би могъл да определи и географската си дължина. Какви биха били източниците на грешка?

<u>Решение:</u> Тъй като мореплавателят е видял Слънцето над хоризонта в долна кулминация, то той трябва да се намира на висока географска ширина, а понеже това се случва през юни, то той трябва да е на висока северна географска ширина. От дадената графика се вижда, че на 13-14 юни деклинацияата на Слънцето е била около 23°15′ и за времето от долната до горната кулминация на Слънцето (интервал около 12 часа) не се е променяла много, така че можем да я считаме за постояанна.



На чертежа с B” е отбелязано видимото положение на Слънцето в долна кулминация. Центърът му е на разстояание NB” = 15’ (колкото е радиусът на видимия слънчв диск) от хоризонта. Поради рефракцията можем да приемем, че истинското положение на центъра на Слънцето B е приблизително на 30’ по-ниско от B”, или на разстояание NB = 15’ под хоризонта. С AA’ е означен небесният екватор, а с B’ – положението на Слънцето в горна кулминация. От чертежа става ясно, че AB = A’B’ = δ = 23°15′ е деклинацияата на Слънцето, а SB’ = *h*’ = 46º45′ е височината на Слънцето над хоризонта в горна кулминация. При тази височина рефракцията е пренебрежимо малка за точността на измерване, която би могъл да постигне мореплавателят с посочените в задачата средства. Освен това, SA’ = 90° - φ’, където φ’ е географската ширина на яхтата в момента на горна кулминация на Слънцето – след бурята. Виждаме, че:

$$h' = 90° - \varphi' + \delta$$

откъдето намираме:

$$\varphi' = 90° + \delta - h'$$

$$\varphi' = 66°30'$$

Що се отнася до положението на яхтата преди бурята, за момента на долна кулминация на Слънцето, то чертежът съответства на предположението, че географската ширина на наблюдателя тогава е била почти същата, както и след бурята. Това и ще докажем чрез пресмятанията, но в общия случай денонощният паралел на Слънцето BB’ не би трябвало да сключва един и същ ъгъл с хоризонта за двете положения на яхтата, както е на нашия чертеж. Понеже AN = 90° - φ, където φ е географската ширина на яхтата преди бурята, то:

$$90° - \varphi = \delta + 15'$$
$$\varphi = 90° - \delta - 15'$$
$$\varphi = 66°30'$$

Следователно, като имаме предвид, че сме приели приблизителна стойност на ъгъла на рефракция, можем да смятаме, че $\varphi \approx \varphi'$, или наистина географската ширина на яхтата е останала почти същата.

Мореплавателят би могъл да определи и географскта си дължина, благодарение на това, че има точен часовник и прецизно си записва координатите в различни моменти от време. Понеже се намира в район, където Слънцето не залязва през нощта, той не може да използва за ориентиране звездите, а само Слънцето. За да намери географската си дължина, той трябва да определи в колко часа по неговия часовник Слънцето е в горна кулминация и да сравни този момент с времето, отчетено по часовника му при едно предишно определяне на географската дължина. По-удобно е всеки път определянето да става при горна кулминация, защото не навсякъде и всякога Слънцето се вижда над хоризонта в долна кулминация. Разликата между двете показания на часовника е равна на разликата между географските дължини на двата пункта. Мореплавателят трябва да остави часовника си да върви по местното време на някакъв начален пункт и да не го настройва към местните или поясни времена на областите, през които пътува.

Грешките при определянето на координатите произтичат от ограничената точност на ъгломерните инструменти, от невъзможността точно да се фиксира моментът на горна кулминация на Слънцето и от уравнението на времето.

<u>Задача 2</u>. Оценете колко сблъсъци с метеорни тела би изпитвала Земята за едно денонощие, ако средното разстояние между две съседни метеорни тела е 160 km.

Упътване: Приемете прост, приблизителен модел на рзпределението на метеорните тела в пространството.

<u>Решение:</u> Приемаме, че метеорните тела са разположени във възлите на една въображаема кубична решетка на разстояние x = 160 km между всеки две съседни тела в трите перпендикулярни посоки. Тогава можем да считаме, че във всеки обем с форма на куб със страна x има по една метеорна частица, или концентрацията на частиците е:

$$n = \frac{1}{x^3}$$

Орбиталната скорост на движение на Земята около Слънцето е v = 30 km/sec (ако не си я спомняме, пресмятаме я, като разделим дължината на земната орбита с радиус 150 млн km на броя на секундите в една година). Пътят, изминат от Земята за едно денонощие можем да считаме за отсечка с дължина:

$$L = vT ,$$

където $T = 24^h$. За това време със Земята се сблъскват метеорните тела, разположени в цилиндър с дължина L и радиус, равен на земния радиус R = 6400 km. Ако с V означим обема на цилиндъра, то броят на тези тела е:

$$N = nV$$

$$N = n\pi R^2 L = \frac{\pi R^2 v T}{x^3}$$

$N \approx 80 \times 10^6$ удара за денонощие

<u>Задача 3</u>. Може ли звезда като Слънцето, намираща се в мъглявината Андромеда (М31), да се наблюдава визуално (с око) през най-големия оптически телескоп в света? Направете количествена теоретична оценка.

Как мислите, може ли такава звезда да се фотографира със същия телескоп с помощта на CCD матрица? Дайте качествен отговор и го обосновете. Посочете факторите, които влияят върху възможността за подобно наблюдение.

<u>Решение:</u> Разстоянието r до М31 е около 2×10^6 ly или около 600000 pc. Абсолютната звездна величина на Слънцето е $M = 4.8^m$. Приемаме, че граничната звездна величина, при която една звезда може да се види от наблюдател с нормално зрение, е $m_L = 6.5^м$. Ако r се измерва в парсеци, а m е видимата звездна величина на звезда като Слънцето, принадлежаща на галактиката М31, то:

$$M = m + 5 - 5\lg r$$

Оттук получаваме:

$$m = M - 5 + 5\lg r$$

$$m \approx 29^m$$

Най-големите оптически телескопи в света са двата телескопа “Кек” на Хавайските острови, всеки с диаметър на обектива D = 10 m. Нека с E и E_1 означим осветеностите, които създава една звезда при наблюдение с невъоръжено око и при наблюдение през телескопа, а с d – диаметъра на зеницата на окото при адаптиране към тъмнината, който да приемем, че е 6 mm.

$$\frac{E_1}{E} = \left(\frac{D}{d}\right)^2$$

При наблюдение на звездата през телескопа нейната звездна величина ще намалее със стойност Δm, за която можем да напишем:

$$\lg\left(\frac{E_1}{E}\right) = 0.4\Delta m$$

$$\Delta m = 2.5\lg\left(\frac{E_1}{E}\right) = 5\lg\left(\frac{D}{d}\right)$$

$$\Delta m \approx 16^m$$

Звезда със звездна величина 29^m би се виждала като звезда със звездна величина $29^m - 16^m = 13^m$, което е доста повече от граничната звездна величина m_L. Следователно не бихме могли да видим такава звезда. (Можем да пресметнем, че теоретично, за да я видим, ще трябва да използваме телескоп с диаметър, не по-малък от 190 m).

С днешните все по-съвършени CCD матрици с помощта на големите оптически телескопи се наблюдават обекти от 29^m и дори по-слаби. Това се дължи не само на високата чувствителност, но и на възможността да се правят продължителни експонации, при които светлинното въздействие се натрупва –

нещо невъзможно за човешките очи. Основните фактори, които влияят върху възможността за наблюдение на слабите обекти са поглъщането на светлината в оптическите елементи на телескопа и размиването на изображението в резултат от въздействието на земната атмосфера. Поради последния фактор изображението на точков обект се размива в радиус, значително по-голям от радиуса на дифракционното изображение и повърхностната му яркост намалява. До определена, макар и все още незадоволителна степен този проблем се преодолява с помощта на системите за адаптивна оптика.

<u>Задача 4.</u> В дадената по-долу таблица са представени изчислените ефемериди за кометата C/2001 Q4 (NEAT) през май 2004 година. Направете необходимите пресмятания и постройте графика, показваща предвижданото изменение на абсолютната звездна величина на кометата в зависимост от времето. Обяснете получения резултат.

Упътване: Абсолютна звездна величина е звездната величина на кометата, гледана от разстояние 1 AU.

В действителност кометата се оказа далеч не толкова ярка, колкото се очакваше. На какво може да се дължи това?

Ефемериди на кометата C/2001 Q4 (NEAT)

Дата	Разстояние до Слънцето, AU	Разстояние до Земята, AU	Видима звездна величина
06.May.04	0,978	0,332	0,9
08.May.04	0,972	0,323	0,9
10.May.04	0,968	0,338	1
12.May.04	0,964	0,362	1,1
14.May.04	0,962	0,396	1,3
16.May.04	0,962	0,436	1,5
18.May.04	0,963	0,481	1,7
20.May.04	0,964	0,529	2
22.May.04	0,968	0,58	2,2
24.May.04	0,972	0,632	2,4
26.May.04	0,978	0,685	2,6
28.May.04	0,985	0,738	2,8
30.May.04	0,993	0,792	3

<u>Решение:</u> Нека осветеността, създавана от кометата на разстояние от Земята r е E, а на разстояние $r_0 = 1$ AU е E_0. Абсолютната звездна величина M на кометата намираме от съотношението:

$$\lg\left(\frac{E}{E_0}\right) = 2\lg\left(\frac{r_0}{r}\right) = 0.4(M - m)$$

където m е видимата звездна величина на кометата от разстояние r.

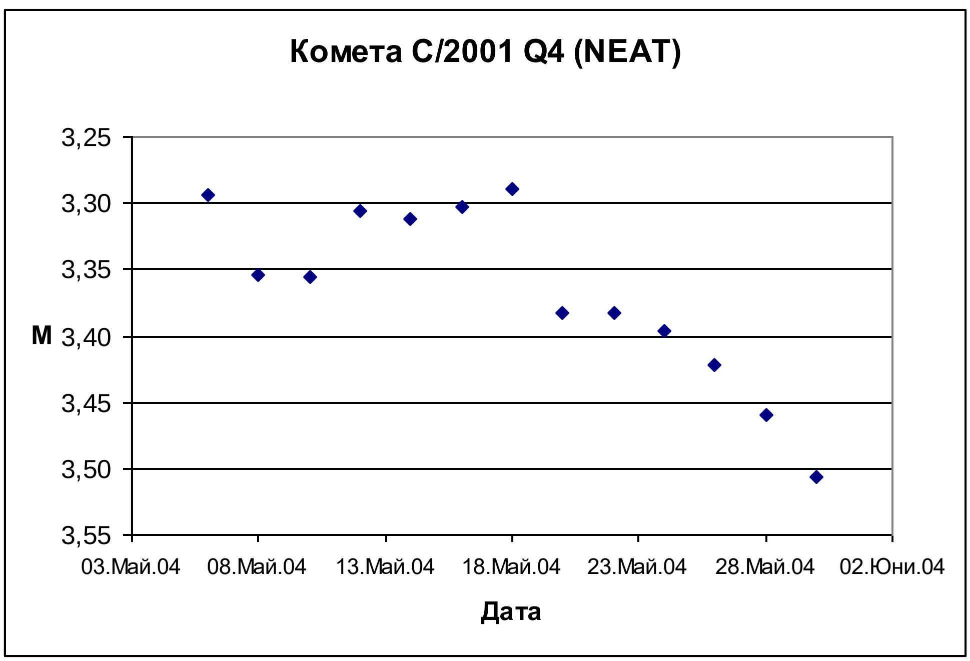
$$M = m + 5\lg\left(\frac{r_0}{r}\right) = m - 5\lg r \text{ [AU]}$$

Добавяме към таблицата още една колона:

Ефемериди на кометата C/2001 Q4 (NEAT)

Дата	Разстояние до Слънцето, AU	Разстояние до Земята, AU	Видима звездна величина	Абсолютна звездна величина
06.Май.04	0,978	0,332	0,9	3,29
08.Май.04	0,972	0,323	0,9	3,35
10.Май.04	0,968	0,338	1	3,36
12.Май.04	0,964	0,362	1,1	3,31
14.Май.04	0,962	0,396	1,3	3,31
16.Май.04	0,962	0,436	1,5	3,30
18.Май.04	0,963	0,481	1,7	3,29
20.Май.04	0,964	0,529	2	3,38
22.Май.04	0,968	0,58	2,2	3,38
24.Май.04	0,972	0,632	2,4	3,40
26.Май.04	0,978	0,685	2,6	3,42
28.Май.04	0,985	0,738	2,8	3,46
30.Май.04	0,993	0,792	3	3,51

Построяваме следната графика:



Графиката отразява изменението на блясъка на кометата само като функция на разстоянието до Слънцето – елиминирано е влиянието на различното разстояние до Земята. От таблицата се вижда, че преминаването на кометата през перихелия се е очаквало около 15-16 май 2004 г. Наистина графиката показва, че тогава се е очаквало кометата да е най-ярка.

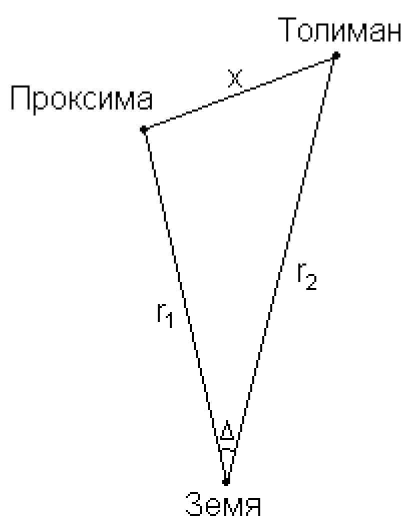
Кометите рядко се проявяват според теоретичните предсказания, защото не е възможно да се предвиди как точно под действие на слънчевото излъчване ще протича отделянето на вещество от кометното ядро при сближаването със Слънцето, а от това се определя и блясъкът на кометата. Ето защо и наблюдаваната звездна величина на кометата се е оказала по-различна от очакваното.

Ученици старша възраст

Задача 1. Виж задача 1 за младша възраст.

Задача 2. Най-близката до нас звезда Проксима от Центавър има паралакс 0",772. Тя се движи в орбита около двойната звезда Толиман (α Cen), чиито паралакс е 0",749. Проксима отстои на 2°37′39" от Толиман. Звездните величини на двете компоненти от системата α Cen са $-0{,}01^m$ и $1{,}34^m$. Определете видимите звездни величини на тези две звезди за наблюдател в околностите на Проксима.

Решение: Паралаксите на звездите Проксима и Толиман са съответно p_1 = 0",772 и p_2 = 0",749. Разстоянията от нас до двете звезди са $r_1 = 1/p_1 = 1.295$ pc и $r_2 = 1/p_2 = 1.335$ pc. Проксима се намира на ъглово отстояние Δ = 2°37′39" от Толиман. Да означим линейното разстояние от Проксима до Толиман с x.



По косинусовата теорема в показания на чертежа триъгълник намираме:

$$x = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\Delta}$$

$$x \approx 0.07235 \text{ pc} \approx 16000 \text{ AU}$$

В случай, че не знаем косинусовата теорема, може да използваме приблизителното съотношение:

$$x \approx (r_1 + r_2)\frac{\Delta}{2}$$

където Δ е в радиани и ще получим $x \approx 0.06027$ pc ≈ 12400 AU.

Осветеностите, които една от компонентите на α Cen създава за земния наблюдател и за наблюдател близо до Проксима нека означим съответно с E и E'. Тогава:

$$\lg\left(\frac{E'}{E}\right) = \lg\left(\frac{r_2^2}{x^2}\right) = 0.4(m - m')$$

където m и m' са видимите звездни величини на тази компонента от Земята и от Проксима. Оттук следва:

$$m' = m - 5\lg\left(\frac{r_2}{x}\right)$$

и за звездните величини на двете компоненти получаваме:

$$m_A \approx -6.3^m$$
$$m_B \approx -5.0^m$$

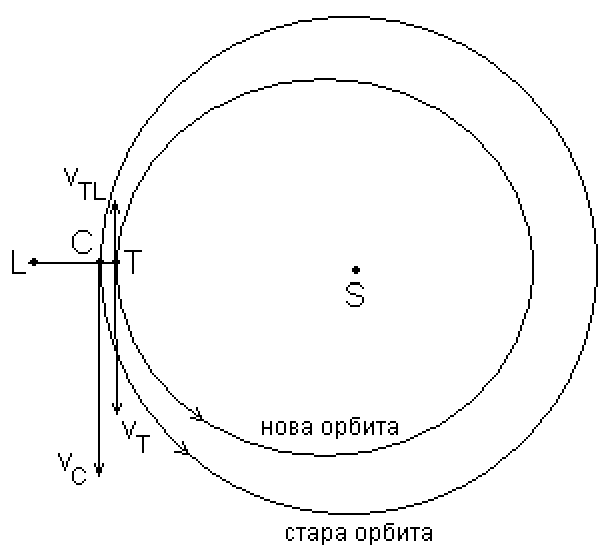
Ако сме използвали разстоянието x ≈ 0.06027 pc ≈ 12400 AU, то ще получим:

$$m_A \approx -6.7^m$$
$$m_B \approx -5.4^m$$

<u>Задача 3</u>. Както е известно, лунно затъмнение става, когато гигантска митична ламя погълне Луната. В миналото по време на лунно затъмнение хората са стреляли с пушки в небето, за да изплашат ламята и да я принудят да върне Луната. Нека допуснем, че това вече е омръзнало на ламята. При поредното планирано от нея лунно затъмнение тя поглъща Луната и мигновено изчезва, както само ламите умеят.

- на Земята и периодът ѝ на обикаляне около Слънцето.
- Опитайте се да направите и количествени оценки, като приемете, че орбитата на центъра на масите на системата Земя-Луна около Слънцето е кръгова с радиус 149,6×10^6 km, разстоянието между Земята и Луната е 384000 km, а масата на Луната е 81 пъти по-малка от масата на Земята.

<u>Решение:</u> При лунно затъмнение Луната е в пълнолуние и за целите на решението можем да считаме, че тя лежи на една права линия със Земята и Слънцето. На чертежа с S, T, C и L са отбелязани положенията съответно на Слънцето, Земята, центъра на масите на системата Земя-Луна и Луната.



Центърът на масите се движи с кръгова скорост V_C около Слънцето. В дадения момент Земята има малко по-малка скорост и тя е:

$$V_T = V_C - V_{TL}$$

където V_{TL} е скоростта на Земята относно центъра на масите на системата Земя-Луна C. Освен това Земята е и на малко по-малко разстояние от Слънцето, отколкото C. Това означава, че Земята има скорост, по-малка от кръговата скорост за движение по орбита с радиус, равен на моментното разстояние от Земята до Слънцето.

Следователно, след изчезването на Луната, Земята ще тръгне по елиптична орбита, в чиито по-далечен фокус ще е Слънцето. Голямата полуос на тази орбита ще бъде по-малка от радиуса на първоначалната орбита, от което по III закон на Кеплер следва, че и новият орбитален период на Земята ще е по-кратък.

За да направим количествена оценка, въвждане следните означения:

M_S, M_T, M_L – маси на Слънцето, Земята и Луната

r_S, r_L – разстяния от Земята до Слънцето и от Земята до Луната

a, T – голяма полуос и период на новата орбита на Земята

$$\alpha = M_L/M_T = 1/81; \qquad \beta = M_T/M_S; \qquad \gamma = \alpha\, r_L/r_S \qquad (1)$$

Приемаме, че Луната се движи около Земята по кръгова орбита с радиус r_L и скорост $V_L = \sqrt{GM_T/r_L}$. Тогава скоростта на Земята относно С ще бъде:

$$V_{TL} = \alpha V_L = \alpha\sqrt{\frac{GM}{r_L}} \qquad (2)$$

Скоростта на Земята относно Слънцето ще е:

$$V_T = V_C - V_{TL} \qquad (3)$$

$$V_T = \sqrt{\frac{GM_S}{r_S}} - \alpha\sqrt{\frac{GM_T}{r_L}} \qquad (4)$$

Пълната механична енергия на Земята ще бъде:

$$E = M_T\left(\frac{V_T^2}{2} - \frac{GM_S}{(r_S - \alpha r_L)}\right) \qquad (5)$$

където αr_L е разстоянието от Земята до С. От друга страна, при движение на тяло по елиптична орбита с голяма полуос a, в момент, когато тялото се намира на разстояние a от гравитационния център, скоростта на тялото става равна на кръговата скорост $V_{кр}$ при движение по окръжност с радиус a около същия център. За този момент можем да напишем:

$$E = M_Y\left(\frac{V_{кр}^2}{2} - \frac{GM_S}{a}\right) \qquad (6)$$

Понеже $V_{кр} = \sqrt{GM_S/a}$, то получаваме:

$$E = -\frac{GM_S M_T}{2a} \qquad (7)$$

Приравняваме (5) и (7), и като заместим с (4), получаваме:

$$a = \frac{GM_S}{2\left(\frac{GM_S}{r_S - \alpha r_L} - \frac{V_T^2}{2}\right)} \qquad (8)$$

$$a = \frac{GM_S}{2\left(\frac{GM_S}{r_S - \alpha r_L} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{GM_S}{r_S}} - \alpha\sqrt{\frac{GM_T}{r_L}}\right)^2\right)} \qquad (9)$$

Като използваме въведените по-горе съотношения (1), намираме:

$$a = \frac{r_S}{\frac{2}{1-\gamma} - \left(1 - \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma}}\right)^2} \quad (10)$$

и като направим някои приближения, имайки предвид, че $\gamma << 1$ и $\alpha\beta/\gamma << 1$, получаваме:

$$a = \frac{r_S}{1 + 2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma}}} \quad (11)$$

От III закон на Кеплер за орбиталния период имаме:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_S}}$$

$$T = 364.3 \text{ дни}$$

Получава се интересният резултат, че годината ще се скъси почти точно с едно денонощие.

<u>Задача 4</u>. Използвайки предоставената ви снимка, определете границите на сферичния звезден куп Омега Центавър и неговия геометричен център, както и ъгловия размер на купа. Представете графически функцията на звездната плътност от разстоянието до центъра на купа. Считайте, че хоризонталният размер на снимката съответства на 1°.

<u>Решение:</u> Сферичните звездникупове съдържат голям брой звезди със силна концентрация към центъра на купа, където видимо звездите не се разделят, а образуват плътно светещо петно. В случая с Омега Центавър избираме от централната част на купа област, в която звездите вече са неразличими като отделни обекти, и я очертаваме внимателно с кръгче. Прекарваме две хоризонтални успоредни прави, допирателни към горната и долната част на кръга. Получава се област, която разделяме на равни по площ звездни площадки. Преброяваме звездите в тях и получените данни нанасяме в таблица. Построяваме графика, представяща зависимостта на броя на звездите N в една площадка от разстоянието r от условно избрана начална точка. Определяме тези части от графиката, които се намират малко над границата на флуктуациите на звздната плътност. Измерваме ширината на тази част от графиката в милиметри. Нека 1 mm по скалата за разстоянието r на графиката отговаря на n mm върху изображението. Умножаваме измерената ширина на графиката по n. Определяме средата на отсечката, отговаряща на ширината на графиката. Нанасяме положението на тази точка върху скалата r и умножаваме нейната координата също по n. Така получаваме на какво разстояние се намира центърът на купа от ляватая граница на изображението и прекарваме вертикална права линия нат това разстояие през звездния куп. Повтаряме цялата процедура във вертикална посока. Пресечната точка на двете перпендикулярни централни прави е центъра на Омега Центавър.

Пресмятаме ъгловия мащаб на фотографията, като се има предвид , че хоризонталният й размер е 1°. Получаваме, че 1 mm от снимката е равен на 0.4’.

Превръщаме определената от нас по-горе ширина на купа в ъглови единици и полъчаваме, че тя е приблизително 36’.